

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse fonctionnelle

**Par**

Bachir SAADI

**Sujet**

**Sur les polynômes  $m$ -homogènes  
intégrales**

Date de soutenance : 01/07/2019

**Devant le jury :**

Dr. TALLAB Abdelhamid	M.C.B. Univ de M'sila	Président
Ms. ALOUANI Ahlem	M.C.B. Univ de M'sila	Rapporteur
Dr. YAHY Rachid	M.C.B. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2018 / 2019**

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents,

-A mes frères,

-A mes soeures,

-A toute ma famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

# Remerciements

D'abord et avant tout, je voudrais remercier "Allah" qui me bénit de terminer ce travail.

Je veux exprimer mon vif remerciement à mon superviseur Ms. Ahlem ALOUANI, pour son aide efficace, son orientation et ses conseils précieux.

Aussi, mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques, et spécialement, les enseignants de spécialité d'analyse fonctionnelle.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les applications multilinéaires et les polynômes <math>m</math>-homogènes</b>	<b>2</b>
1.1 Les applications multilinéaires continues . . . . .	2
1.2 Les polynômes $m$ -homogènes . . . . .	7
<b>2 Le produit tensoriel</b>	<b>13</b>
2.1 Le produit tensoriel . . . . .	13
2.2 La norme projective . . . . .	15
2.3 La norme injective . . . . .	21
2.4 La linéarisation des polynômes $m$ -homogènes . . . . .	22
<b>3 Les polynômes <math>m</math>-homogènes intégrales</b>	<b>28</b>
3.1 Les polynômes $m$ -homogènes intégrales . . . . .	28
3.2 La linéarisation des polynômes $m$ -homogènes intégrales . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

# Introduction

Les travaux de ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de l'analyse non linéaire spécialement destinée aux classes des applications multilinéaires et les polynômes  $m$ -homogènes entre les espaces de Banach, ce cadre fait encore l'objet de recherche par plusieurs auteurs tels Alencar, Botelho, Cilia, Matos, Pellegrino, Pietsch, Villaneuva, ... etc.

Les études profondément des classes des applications non linéaires premierement apparu sans l'utilisation de produit tensoriel, le produit tensoriel a été utilisé pour la première fois dans le travail de Murray et Jhon von Neumann sur les espaces de Hilbert.

Il est remarquable que le transfère des propriétés linéaires vers des propriétés non linéaires n'est pas une tâche évidente, encore compliqué lorsque on travaille avec les polynômes  $m$ -homogènes. Dans ce travail on introduit le concept des polynômes  $m$ -homogène. Nous avons donner des outiles de base du produit tensoriel, et nous avons présenté les polynômes  $m$ -homogènes intégrales et la linéarisation des polynômes  $m$ -homogènes intégrales.

Ce travail est organisé en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, on a présenté des définitions et des résultats de base sur les application  $m$ -linéaires et les polynômes  $m$ -homogènes.

Dans le deuxième chapitre, on a concentré sur la théorie du produit tensoriel, où on a donné des définitions et des propositions, ainsi, on a défini la norme projective et la norme injective, de plus le théorème de linéarisation des applications  $m$ -linéaires et les polynômes  $m$ -homogènes.

Le troisième chapitre a été consacré pour les applications multilinéaires intégrales et les polynômes  $m$ -homogènes intégrales et la linéarisation des polynômes  $m$ -homogènes intégrales.

# Chapitre 1

## Les applications multilinéaires et les polynômes $m$ -homogènes

Dans ce chapitre, on donne un préliminaire sur les applications multilinéaires et les polynômes  $m$ -homogènes.

### 1.1 Les applications multilinéaires continues

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels sur un même corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), soit  $T$  une application de  $X$  dans  $Y$ . On dit que  $T$  est linéaire, pour tout  $x, y \in X$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$$

on note par  $L(X, Y)$  l'ensemble des applications linéaire de  $X$  dans  $Y$ .

Une application linéaire  $T : X \rightarrow Y$  est dit continue si, et seulement si, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leq C \|x\| \tag{1.1}$$

on note par  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'ensemble des applications linéaire continue de  $X$  dans  $Y$ , muni du norme vérifie le plus petite constante  $C$  de l'inégalité (1.1). Pour  $Y = \mathbb{K}$ , on écrit  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X) = X^*$  le dual topologique de  $X$ .

La boule d'unité fermée de  $X$  sera noté  $\mathcal{B}_X$ .

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ),  $Y$  des espaces normés sur  $\mathbb{K}$ . On considère le produit cartésien

$$X_1 \times \dots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_j \in X_j; \forall 1 \leq j \leq m\},$$

qui est un espace normé muni du norme

$$\|(x^1, \dots, x^m)\| := \max \{\|x^j\| : x^j \in X_j; \forall 1 \leq j \leq m\}.$$

**Définition 1.1.1** L'application  $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$  est dite multilinéaire ou  $m$ -linéaire, si pour tout  $a^j, b^j \in X_j$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , avec  $j = 1, \dots, m$ , on a

$$T(x^1, \dots, \alpha a^j + \beta b^j, \dots, x^m) = \alpha T(x^1, \dots, a^j, \dots, x^m) + \beta T(x^1, \dots, b^j, \dots, x^m).$$

On note par  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'ensemble des applications multilinéaire de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$ . Pour  $Y = \mathbb{K}$ ,  $T$  est dite forme multilinéaire.

**Remarque 1.1.1** Définissons les opérations,

$$(1) (S + T)(x^1, \dots, x^m) = S(x^1, \dots, x^m) + T(x^1, \dots, x^m)$$

$$(2) (\lambda T)(x^1, \dots, x^m) = \lambda T(x^1, \dots, x^m)$$

pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$  et  $S, T \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Ce qui donne à  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  une structure d'espace vectoriel. Si  $Y = \mathbb{K}$ , on écrit  $L(X_1, \dots, X_m)$ , et si  $X = X_1 = \dots = X_m$ , on écrit  $L^m X; Y$ .

**Proposition 1.1.1** [2] Soit  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espaces normés. Pour tout  $T \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$ , les affirmations suivantes sont équivalentes

(1)  $T$  est continue

(2)  $T$  est continue en  $(0, \dots, 0)$

(3)  $\|T(x^1, \dots, x^m)\|$  est borné sur le produit des boules unitées:

$$\|x^1\|_{X_1} \leq 1, \dots, \|x^m\|_{X_m} \leq 1$$

(4) Ils existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \|x^1\| \cdots \|x^m\|$$

pour tout  $x^j \in X_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ).

Pour la dimonstration voir [2].

Pour chaque  $m \in \mathbb{N}$ , on note l'ensemble des applications multilinéaires continues de  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $Y$  par  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Si  $Y = \mathbb{K}$ , on écrit  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ , et pour simplification si  $X = X_1 = \dots = X_m$  on écrit  $\mathcal{L}^m(X; Y)$ . Si  $m = 1$  c'est l'ensemble des applications linéaire continue.

**Proposition 1.1.2** Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  sont des espaces normés sur  $\mathbb{K}$ , alors l'application  $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par:

$$\|T\| = \sup_{\|x^j\|_{X_j} \leq 1, j=1, \dots, m} \|T(x^1, \dots, x^m)\| \quad (1.1.1)$$

est une normé.

Où  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace normé avec la norme définie dans 1.1.1.

**Proposition 1.1.3** Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X_1, \dots, X_m$  sont des espaces normés sur  $\mathbb{K}$ , et  $Y$  est un espace de Banach, l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  est un espace de Banach muni du norme  $\|T\|$ , donne par

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x^j\|_{X_j} \leq 1, j=1, \dots, m} \|T(x^1, \dots, x^m)\| \\ &= \inf \{C \geq 0, \|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq C \|x^1\| \cdots \|x^m\|\} \end{aligned}$$

**Théorème 1.1.1** Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y$  sont des espaces de Banach, l'application  $T \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$  est continue si, est seulement si,  $T$  est continue pour chaque variable de  $X_1 \times \dots \times X_m$

**Corollaire 1.1.1** Si les espaces  $X_1, \dots, X_m$  sont des dimensions finies, alors toute  $T \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$  est continue, i.e.,  $L(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ .



### Applications $m$ –linéaire symétrique

Pour chaque  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note l'ensemble  $S_m$  de toutes les permutations de  $\{1, \dots, m\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des bijections  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ .

**Définition 1.1.2** Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $X, Y$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Une application multilinéaire continue  $T: X \times \dots \times X \rightarrow Y$ , est dite *symétrique* si

$$T(x^1, \dots, x^m) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

pour tout  $x^1, \dots, x^m \in X$ , et toute permutation  $\sigma \in S_m$ . On note  $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$  l'espace des applications multilinéaires continues symétriques, lequel est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(^m X; Y)$ .

Si on fait toutes les permutations possibles on peut associer à  $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$  une application symétrique  $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$  cet application  $T_s$  s'appelle l'application symétrie de  $T$ .

**Proposition 1.1.4** [1] Pour chaque application  $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ , On associe l'application symétrique  $T_s$  de  $T$  défini par

$$T_s(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites:

- (1)  $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ .
- (2)  $T_s = T$  si, et seulement si,  $T \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ .
- (3)  $(T_s)_s = T_s$ .
- (4) l'opérateur  $R: \mathcal{L}(^m X; Y) \rightarrow \mathcal{L}(^m X; Y)$ , défini par  $R(T) = T_s$  est linéaire.
- (5) Si  $x \in X$ , alors  $T(x, \overset{(m)}{\dots}, x) = T_s(x, \overset{(m)}{\dots}, x)$ .

Pour la démonstration voir [1].

Le lemme suivant montre la formule de polarisation appliquée pour l'application multilinéaire. Pour plus de détails, voir [8].

**Lemme 1.1.1 (Formule de Polarisation)** Soit  $X, Y$  des espaces vectoriels et  $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ .

Alors

$$T_s(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m T \left( x^0 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x^j + \dots + x^0 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x^j \right)$$

pour tout  $x^0, x^1, \dots, x^m \in X$ . En particulier, si  $T$  est symétrique, il est déterminé par ses valeurs  $T(x, \dots, x)$ ,  $x \in X$ , le long de la diagonale.

**Preuve.** Pour la prouver on utilise cette égalité

$$T \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_{i_1}^1 x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i=1}^{n_m} a_{i_m}^m x_{i_m}^m \right) = \sum_{\substack{1 \leq i_j \leq n_j \\ j=1, \dots, m}} \left( \prod_{j=1}^m a_{i_j}^j \right) T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)$$

pour tout  $n_j \in \mathbb{N}$ ,  $a_{i_j}^j \in \mathbb{K}$ , et  $x_{i_j}^j \in X_j$ , où  $i_j = 1, \dots, n_j$  et  $j = 1, \dots, m$ . On obtient :

Pour plus de commodité, nous mettons  $\varepsilon_0 = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m T \left( x^0 + \sum_{j=0}^m \varepsilon_j x_j + \dots + x^0 + \sum_{j=0}^m \varepsilon_j x_j \right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \left( \sum_{j_1, \dots, j_m \in \{0, \dots, m\}} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} \right) T(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{j_1, \dots, j_m \in \{0, \dots, m\}} \left( \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} \right) T(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}). \end{aligned}$$

S'il y a  $k \in \{0, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$ , puis

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} &= \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j \neq k}} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} \prod_{j \neq k} \varepsilon_j + (-1) \cdot \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j \neq k}} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} \prod_{j \neq k} \varepsilon_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!2^m} \sum_{j_1, \dots, j_m \in \{0, \dots, m\}} \left( \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_m} \right) T(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} (\varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_m^2) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = T_s(x^1, \dots, x^m). \end{aligned}$$

Où  $S_m$  est l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, m\}$ . ■

## 1.2 Les polynômes $m$ -homogènes

**Définition 1.2.1** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $X, Y$  deux espaces normés. Une application  $P : X \rightarrow Y$  est dite polynôme  $m$ -homogène ou polynôme homogène de degré  $m$ , s'il existe une application multilinéaire  $T \in L(mX; Y)$ , tel que  $P(x) = T(x, \overset{(m)}{\dots}, x)$  pour tout  $x \in X$ . Dans ce cas, on dit que  $P$  est le polynôme  $m$ -homogène associée par l'application multilinéaire  $T$ .

On note par  $P(X; Y)$  l'espace de tous les polynômes  $m$ -homogènes de  $X$  dans  $Y$ .

Si  $Y = \mathbb{K}$ , on écrit  $P(X; Y) = P(X)$ .

**Exemple 1.2.1** L'application  $P : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ , définie par  $P(x) = \alpha x^m$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , est un polynôme  $m$ -homogène. On prend l'application  $T \in L(m\mathbb{K})$  donnée par  $T(x^1, \dots, x^m) = \alpha x^1 \dots x^m$ , donc on a  $P(x) = T(x^1, \dots, x^m)$  (notez que ce sont les seuls polynômes  $m$ -homogènes de  $\mathbb{K}^m$  dans  $\mathbb{K}$ ).

Si  $T \in L(mX)$  et  $x^1, \dots, x^m \in X$  on a

$$T(x^1, \dots, x^m) = x^1 \dots x^m T(1, \dots, 1) = \alpha x^1 \dots x^m \quad (1.2.1)$$

où  $\alpha = T(1, \dots, 1)$ .

Pour définir les polynômes  $m$ -homogènes, nous utilisons l'intégration naturelle appelée polynôme canonique de  $X$  dans  $X \times \overset{(m)}{\dots} \times X$ , on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_m} & X \times \overset{(m)}{\dots} \times X \\ & \searrow P & \downarrow T \\ & & Y \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_m : X &\rightarrow X \times \overset{(m)}{\dots} \times X \\ x &\mapsto (x, \overset{(m)}{\dots}, x). \end{aligned}$$

Le polynôme  $m$ -homogène  $P : X \rightarrow Y$  est dit continu si, et seulement si, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in X : \|P(x)\| \leq C \|x\| ,$$

on note par  $\mathcal{P}(^m X; Y)$  l'espace de tous les polynômes  $m$ -homogènes continues de  $X$  dans  $Y$ , définie par.

Si  $Y = \mathbb{K}$ , on écrit  $\mathcal{P}(^m X; Y) = \mathcal{P}(^m X)$ , de plus si  $m = 1$ , on écrit  $\mathcal{P}(^1 X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$ .

**Proposition 1.2.1** [7] *Pour chaque  $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ , il existe un unique application multilinéaire symétrique  $\hat{P} \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ , tel que  $P(x) = \hat{P}(x, \binom{m}{\cdot}, x)$ , pour tout  $x \in X$ , et on a les inégalités suivantes:*

$$\|P\| \leq \|\hat{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|. \quad (1.2.2)$$

**Preuve.** Soit  $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ . Par définition, il existe  $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$  tel que  $P(x) = T(x, \binom{m}{\cdot}, x)$  pour tous  $x \in X$ . On définit  $T_s$  par

$$T_s(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(m)}),$$

alors

$$\begin{aligned} T_s(x, \binom{m}{\cdot}, x) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x, \binom{m}{\cdot}, x) = \frac{1}{m!} m! T(x, \binom{m}{\cdot}, x) = T(x, \binom{m}{\cdot}, x) \\ &\Leftrightarrow T_s(x, \binom{m}{\cdot}, x) = P(x), \end{aligned}$$

il suffit de prendre  $\hat{P} = T_s$ .

Pour l'unicité de  $\hat{P}$ . Si une application multilinéaire symétrique  $h_s \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$  tel que  $P(x) = h_s(x, \binom{m}{\cdot}, x)$ , pour chaque  $x \in X$ , alors  $\hat{P}(x, \binom{m}{\cdot}, x) = h_s(x, \binom{m}{\cdot}, x)$  pour chaque  $x \in X$  et par la formule la polarisation nous concluons que  $\hat{P} = h_s$ .

Pour tout  $x \in X$  avec  $\|x\| \leq 1$ , on a

$$\|P(x)\| \leq \|\hat{P}\| \|x\|^m \leq \|\hat{P}\|$$

donc,  $\|P\| \leq \|\hat{P}\|$ .

Soit  $x_1, \dots, x_m \in X$ , avec  $\|x_j\| \leq 1$ . En utilisant la formule de polarisation avec  $x^0 = 0$ , on a

$$\|\hat{P}(x^1, \dots, x^m)\| \leq \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x^1 + \dots + \varepsilon_m x^m)\|$$

pour  $\varepsilon = \pm 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \| \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x^1 + \dots + \varepsilon_m x^m) \| \leq \| P \| \| \varepsilon_1 x^1 + \dots + \varepsilon_m x^m \|^m \\ & \leq \| P \| (\| x^1 \| + \dots + \| x^m \|)^m \\ & \leq \| P \| m^m \end{aligned}$$

alors,

$$\| \hat{P}(x^1, \dots, x^m) \| \leq \frac{m^m}{m! 2^m} \| P \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \|^m$$

donc

$$\| \hat{P} \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \|^m$$

■

**Proposition 1.2.2** [4] Soient  $X, Y$  deux espaces normés,  $T \in L_s({}^m X; Y)$  et  $P \in P({}^m X; Y)$ .

Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (1)  $T_s \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ .
- (2)  $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ .
- (3)  $P$  est continu en 0.
- (4) Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|P(x)\| \leq C \|x\|^m$  pour tout  $x \in X$ .
- (5)  $\|P\| = \sup \{ \|P(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} < \infty$ .

**Preuve.** (1)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $T \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ , on a  $P = T \circ \Delta_m$ , où  $\Delta_m : X \rightarrow X^m$  définie par  $\Delta_m(x) = (x, \dots, x)$ . Comme  $\Delta_m$  et  $T$  sont continues, alors  $P$  est continu.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Si  $P$  est continu, en particulier,  $P$  est continu en 0.

(3)  $\Rightarrow$  (4) Si  $P$  est continu en 0, alors, on donne  $\varepsilon = 1$  il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$  avec  $\|x\| \leq \delta$ , on a  $\|P(x)\| \leq \varepsilon$ . Si  $x \neq 0$ , où  $\| \frac{\delta x}{\|x\|} \| = \delta$ , on a

$$\| P(\frac{\delta x}{\|x\|}) \| \leq 1.$$

Donc, pour tout  $x \neq 0$ , on a

$$\| P(x) \| \leq C \|x\|^m, \text{ avec } C = (\frac{1}{\delta})^m$$

Si  $x = 0$ , l'inégalité reste valable.

(4)  $\Rightarrow$  (5) Clair .

(5)  $\Rightarrow$  (1) Si  $\|P\| < \infty$ , alors par la proposition (1.2.1), on a  $\|\hat{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\| < \infty$ , tel que  $\hat{P} = T_s \in L_s(mX; Y)$ , alors  $\|T_s\| < \infty$ , donc  $T_s \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$ . ■

**Proposition 1.2.3** Soient  $X, Y$  deux espaces normés et  $P \in P(mX; Y)$ . Alors

$$\|P\| = \sup \{\|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\};$$

est une norme sur  $P(mX; Y)$ .

**Preuve.** (a) Premièrement, on note que, si  $P \in P(mX; Y)$ , alors par la proposition 1.2.2  $\|P\| < \infty$ . Donc l'application:

$$\|\cdot\| : P(mX; Y) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est bien définie.

Si  $P \in P(mX; Y)$ , alors:

$\|P\| = 0$  si, et seulement si  $\sup \{\|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\} = 0$ . Mais comme l'ensemble  $\{\|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\}$  composé de nombres réels positifs, il en résulte que

$$\begin{aligned} \sup \{\|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\} &= 0 \iff \|P(x)\| = 0, \text{ pour } x \in X, \text{ et } \|x\| \leq 1 \\ &\iff P(x) = 0, \text{ pour } x \in X, \text{ et } \|x\| \leq 1 \\ &\iff P\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0, \text{ pour } y \in X \setminus \{0\} \\ &\iff P(y) = 0, \text{ pour } y \in X \\ &\iff P = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\|P\| = 0$  si, et seulement si  $P = 0$ .

(b) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , pour tout  $x \in X$ , on a

$$\begin{aligned} \|\lambda P\| &= \sup \{\|\lambda P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{|\lambda| \|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \sup \{\|P(x)\| : x \in X^m, \|x\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \|P\|. \end{aligned}$$

(c) Soit  $P, P' \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ .

$$\begin{aligned}
 \| P + P' \| &= \sup \{ \| (P + P')(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1 \} \\
 &= \sup \{ \| P(x) + P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1 \} \\
 &\leq \sup \{ \| P(x) \| + \| P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1 \} \\
 &\leq \sup \{ \| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1 \} + \sup \{ \| P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1 \} \\
 &\leq \| P \| + \| P' \|
 \end{aligned}$$

Donc de (a), (b) et (c) sont vérifiés. Ce qui implique que  $\| \cdot \|_{\mathcal{P}({}^m X; Y)}$  est une norme sur  $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ . ■

**Proposition 1.2.4** [1] *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés. L'application  $\varphi$  définie par*

$$\varphi : \mathcal{L}_s({}^m X; Y) \rightarrow \mathcal{P}({}^m X; Y),$$

$$\varphi(T) = \hat{T},$$

*est une isomorphisme.*

**Preuve.** D'après la proposition 1.2.2, l'application  $\varphi$  est bien définie.

On vérifie que  $\varphi$  est linéaire.

Soit  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors pour tout  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned}
 \varphi(T_1 + \lambda T_2)(x) &= \widehat{(T_1 + \lambda T_2)}(x) \\
 &= (T_1 + \lambda T_2)(x, \overset{(m)}{\dots}, x) \\
 &= T_1(x, \overset{(m)}{\dots}, x) + \lambda T_2(x, \overset{(m)}{\dots}, x) \\
 &= \hat{T}_1(x) + \lambda \hat{T}_2(x) \\
 &= \varphi(T_1)(x) + \lambda \varphi(T_2)(x),
 \end{aligned}$$

donc  $\varphi$  est linéaire.

Maintenant, il suffit de vérifier que  $\varphi$  est bijective.

En effet, si  $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ , par définition, il existe  $T \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$  tel que  $P(x) = T(x, \overset{(m)}{\dots}, x)$ . En effet,

$$T_s(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(m)}),$$

Alors, par la proposition 1.1.4,  $T_s \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  et  $T_s(x, \dots, x) = T(x, \dots, x) = P(x)$ .

Donc l'application  $\varphi$  est surjective.

D'autre part, si  $T \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  et  $\hat{T} = 0$ , alors  $T(x, \dots, x) = 0$ , pour tout  $x \in X$ . donc, par la formule de polirisation:

$$T_s(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m T \left( x^0 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x^j + \dots + x^0 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x^j \right) = 0,$$

pour tout  $x^0, \dots, x^m \in X$ . Donc  $T = 0$ , donc l'application  $\varphi$  est injective.

Nous concluons que  $\varphi$  est une isomorphisme. ■

**Proposition 1.2.5** Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach. L'espace  $\mathcal{P}({}^m X; Y)$  est un espace de Banach.

**Preuve.** Comme  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  est isomorphe à  $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ , alors si  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  est Banach, alors  $\mathcal{P}({}^m X; Y)$  est Banach.

Danc, il suffit de montrer que  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  est un espace de Banach.

On a  $\mathcal{L}({}^m X; Y)$  est Banach, et  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y) \subset \mathcal{L}({}^m X; Y)$ , donc il suffit de montre que  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  est fermé.

Soit  $T \in \overline{\mathcal{L}_s({}^m X; Y)}$ , alors il existe une suite  $(T_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ , tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ .

On a

$$\|T_n(x^1, \dots, x^m) - T(x^1, \dots, x^m)\| = \|(T_n - T)(x^1, \dots, x^m)\| \leq \|T_n - T\| \|x^1\| \dots \|x^m\|,$$

pour tout  $x^1, \dots, x^m \in X$ . Si  $n \rightarrow \infty$  en inégalité ci-dessus, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x^1, \dots, x^m) = T(x^1, \dots, x^m)$$

pour tout  $x^1, \dots, x^m \in X$ . Comme  $T_n \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors, pour tout permutation  $\sigma \in S_m$ , on a

$$T_n(x^1, \dots, x^m) = T_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \rightarrow T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Alors

$$T(x^1, \dots, x^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x^1, \dots, x^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Donc  $T \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ .

Donc  $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$  est fermé, nous concluons que  $\mathcal{P}({}^m X; Y)$  est un espace de Banach. ■



# Chapitre 2

## Le produit tensoriel

Dans le cadre de la théorie des applications multilinéaires, la théorie du produit tensoriel est un outil nécessaire, car il fournit une description simple de la façon dont ces applications agissent sur les produits des espaces de Banach, et aussi parce qu'il permet la représentation des espaces duals des applications multilinéaires. Plus concrètement, nous pouvons comprendre comment fonctionne comme outil.

### 2.1 Le produit tensoriel

Produit tensoriel d'ordre deux

Soit  $X_1, X_2$  deux espaces vectoriels. Un élément  $u$  du produit tensoriel  $X_1 \otimes X_2$  a la forme  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes x_i^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_i^1)_{i=1}^n \in X_1$  et  $(x_i^2)_{i=1}^n \in X_2$ , avec cette représentation n'est pas unique.

Soit  $Y$  un troisième espace vectoriel. Pour chaque la forme bilinéaire  $T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ , il existe une application linéaire unique  $T_L : X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y$  telle que

$$T_L(x^1 \otimes x^2) = T(x^1, x^2), \text{ pour tout } x^1 \in X \text{ et } x^2 \in X_2.$$

Donc le produit tensoriel définit comme une forme linéaire sur l'espace  $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ .

Produit tensoriel d'ordre  $m$

Soient  $m \in \mathbb{N}$ , et  $X_1, \dots, X_m; Y$  des espaces vectoriels, on considère le dual algébrique  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)^*$  de l'espace  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$ , tel que

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)^* = \{\varphi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) \rightarrow \mathbb{K}; \varphi \text{ est une fonctionnelle linéaire}\}.$$

Le produit tensoriel des espaces  $X_1, \dots, X_m$  est construit à partir des éléments de l'espace  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)^*$ .

Soit  $x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m$ , on définit

$$x^1 \otimes \dots \otimes x^m : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) \rightarrow \mathbb{K}$$

par

$$x^1 \otimes \dots \otimes x^m (\varphi) = \varphi(x^1, \dots, x^m),$$

où  $\varphi$  est une forme  $m$ -linéaire:  $\varphi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m) \rightarrow \mathbb{K}$ , et le fonctionnelle  $x^1 \otimes \dots \otimes x^m$  s'appelle un élément tensoriel.

On pose l'ensemble  $D$  formé par tous ces éléments tensoriels,

$$D := \{x^1 \otimes \dots \otimes x^m : x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m\} \subseteq \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)^*.$$

**Définition 2.1.1** *Le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)^*$  engendré par  $D$  est dit produit tensoriel des espaces  $X_1, \dots, X_m$ , et noté par  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , ainsi que les éléments de l'espace  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  s'appellent tenseurs, et sont écrits sous la forme*

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m,$$

tels que  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i^j \in X_j$ ,  $(\lambda_i) \in \mathbb{K}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , et  $i = 1, \dots, n$ . Cette représentation de  $u$  n'est pas unique.

Si  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  et  $\phi$  une forme multilinéaire sur  $X_1 \times \dots \times X_m$ , alors,

$$u(\phi) = \left\langle \phi, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_i^1, \dots, x_i^m).$$

La valeur de cette expression est indépendante du choix de  $u$ .

Par définition, le produit tensoriel  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Alors, on peut voir dans la proposition suivante quelques propriétés algébriques sur les tenseurs élémentaires.

**Proposition 2.1.1** [3] *Soient  $X_1, \dots, X_m$  des espaces vectoriels,  $x_j, y_j \in X_j$ , pour tout  $j = 1, \dots, m$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors:*

- (1)  $x^1 \otimes \cdots \otimes (x^j + y^j) \otimes \cdots \otimes x^m = x^1 \otimes \cdots \otimes x^j \otimes \cdots \otimes x^m + x^1 \otimes \cdots \otimes y^j \otimes \cdots \otimes x^m$
- (2)  $\lambda(x^1 \otimes \cdots \otimes x^j \otimes \cdots \otimes x^m) = x^1 \otimes \cdots \otimes (\lambda x^j) \otimes \cdots \otimes x^m$
- (3)  $x^1 \otimes \cdots \otimes 0 \otimes \cdots \otimes x^m = 0$ .

D'après la propriété (2) du proposition précédente, nous déduisons:

un élément  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ , tel que  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$ , peut être écrit sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m.$$

**Remarque 2.1.1** (1) Si  $\dim X_j < \infty$  pour tout  $j = 1, \dots, m$  alors  $\dim (X_1 \otimes \cdots \otimes X_m) = \prod_{j=1}^m \dim X_j$ .

(2) Pour tout  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ ,  $u \neq 0$ , il existe un plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  pour qui  $u$  admet une représentation de  $n$  termes, telle que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m.$$

Et en plus, on a  $x_1^j, \dots, x_n^j$  sont linéairement indépendant dans  $X_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ , l'entier  $n$  s'appelle le rang de  $u$ . Pour approfondir plus voir [10].

**Proposition 2.1.2** Si  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  alors  $u = 0$  si et seulement

si  $\sum_{i=1}^n \phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m) = 0$ , pour tout  $\phi_j \in X_j^*, j = 1, \dots, m$ .

Pour la démonstration voir [10].

**Proposition 2.1.3** [3] Pour tout espaces vectoriels  $X_1, \dots, X_m$ , on a l'inclusion

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \subset L(X_1^*, \dots, X_m^*).$$

## 2.2 La norme projective

**Lemme 2.2.1** [12] Soit  $X$  un espace normé. On note par le dual topologique  $X'$  est un sous-ensemble du dual topologique  $X^*$  qui sépare les points de  $X$ .

**Proposition 2.2.1** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K}$ , pour chaque  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , nous définissons le nombre réel positif

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\| \right\}$$

où l'infimum portée sur toutes les représentations possibles de  $u$  de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m.$$

Alors  $\pi$  est une norme tensorielle sur l'espace  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  et en plus on a  $\pi(x^1 \otimes \dots \otimes x^m) = \|x^1\| \dots \|x^m\|$ .

**Preuve.** (1) Premièrement, on montre que  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \dots \varphi_m(x_i^m)$  indépendante de représentation de  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , pour tout  $\varphi_1 \in X'_1, \dots, \varphi_m \in X'_m$ .

Soit  $u \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ , supposons que  $u$  a deux représentations de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i^1 \otimes \dots \otimes y_i^m.$$

Pour tout application  $m$ -linéaire  $T \in L(X_1, \dots, X_m)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m) &= \sum_{i=1}^n (x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m) (T) \\ &= (T) \left( \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \right) \\ &= (T) \left( \sum_{i=1}^n y_i^1 \otimes \dots \otimes y_i^m \right) \\ &= \sum_{i=1}^n T(y_i^1, \dots, y_i^m). \end{aligned}$$

En particulier, soient  $\varphi_1 \in X'_1, \dots, \varphi_m \in X'_m$ , et on considère l'application  $T$   $m$ -linéaire est de type finie:

$$\begin{aligned} T: X_1 \times \dots \times X_m &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto T(x^1, \dots, x^m) = \varphi_1(x^1) \dots \varphi_m(x^m). \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m) &= \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m) \\
 &= \sum_{i=1}^n T(y_i^1, \dots, y_i^m). \\
 &= \sum_{i=1}^n \varphi_1(y_i^1) \cdots \varphi_m(y_i^m).
 \end{aligned}$$

Donc  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m)$  indépendante de la représentation de  $u$ .

Maintenant, on montre que  $\pi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ , pour tout  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

Supposons que  $\pi(u) = 0$ , dans ce cas, pour tout  $\epsilon > 0$ , par la définition de  $\pi(u)$ , il existe une représentation  $\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$  de  $u$ , tel que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\| < \epsilon.$$

Alors, pour tout  $\varphi_1 \in X_1', \dots, \varphi_m \in X_m'$

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m) \right| &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x_i^1)| \cdots |\varphi_m(x_i^m)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_1\| \|x_i^1\| \cdots \|\varphi_m\| \|x_i^m\| \\
 &= \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| \sum_{i=1}^n \|x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m\| \\
 &< \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| \epsilon.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m) \right| < \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| \epsilon.$$

D'après ce que nous avons prouvé au début, la valeur de la somme  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(y_i^1) \cdots \varphi_m(y_i^m)$  est indépendante de la représentation de  $u$ , donc si  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient,  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m) = 0$ .

On sait que,  $X_j'$  est un sous-ensemble de  $X_j^*$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Donc  $\sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i^1) \cdots \varphi_m(x_i^m) = 0$ , pour tout  $\varphi_j$  appartenant à un sous-ensemble de  $X_j^*$ .

Donc par la proposition 2.1.2, nous concluons que  $u = 0$ . Si  $u = 0$ , il est clair que  $\pi(u) = 0$ .

(2) On montre que  $\pi(\lambda u) = |\lambda| \pi(u)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

L'égalité est satisfaite pour  $\lambda = 0$ . Supposons que  $\lambda \neq 0$ . Si  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$  est une représentation de  $u$ , alors  $\lambda u = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i^1) \otimes \cdots \otimes x_i^m$ , et donner

$$\begin{aligned} \pi(\lambda u) &\leq \sum_{i=1}^n \|\lambda x_i^1\| \|x_i^2\| \dots \|x_i^m\| \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda| \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\pi(\lambda u)}{|\lambda|} \leq \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\|.$$

Comme cette dernière inégalité est satisfaite pour toute représentation de  $u$ , en prenant l'infimum sur ces représentations, il est obtenu,  $\frac{\pi(\lambda u)}{|\lambda|} \leq \pi(u)$ , c'est-à-dire,  $\pi(\lambda u) \leq |\lambda| \pi(u)$ .

D'autre part,

$$\pi(u) = \pi(\lambda^{-1} \lambda u) \leq |\lambda^{-1}| \pi(\lambda u).$$

Alors,  $|\lambda| \pi(u) \leq \pi(\lambda u)$ . Donc  $\pi(\lambda u) = |\lambda| \pi(u)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

(3) Finalement, on montre que  $\pi(u + v) \leq \pi(u) + \pi(v)$ , pour tout  $u, v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

Soient  $\epsilon > 0$  et  $u, v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ . Par la définition nous pouvons de choisir des représentations  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$  et  $v = \sum_{j=1}^k y_j^1 \otimes \cdots \otimes y_j^m$ , tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \dots \|x_i^m\| &< \pi(u) + \frac{\epsilon}{2} \text{ et} \\ \sum_{j=1}^k \|y_j^1\| \dots \|y_j^m\| &< \pi(v) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m + \sum_{j=1}^k y_j^1 \otimes \cdots \otimes y_j^m$  est une représentation de  $u + v$ , alors

$$\pi(u + v) \leq \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\| + \sum_{j=1}^k \|y_j^1\| \cdots \|y_j^m\| < \pi(u) + \pi(v) + \epsilon.$$

Si  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient,  $\pi(u + v) \leq \pi(u) + \pi(v)$ , pour tout  $u, v \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

Donc, de (1), (2) et (3)  $\pi$  est une norme tensorielle sur l'espace  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

On montre maintenant que  $\pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = \|x^1\| \cdots \|x^m\|$ .

Soient  $x^j \in X_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , il est clair que  $\pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) \leq \|x^1\| \cdots \|x^m\|$ .

On choisit  $\varphi_1 \in B_{X_1'}, \dots, \varphi_m \in B_{X_m'}$ , tels que  $\varphi_j(x^j) = \|x^j\|$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

On considère la forme  $m$ -linéaire de type finie

$$\begin{aligned} S: X_1 \times \cdots \times X_m &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto S(x^1, \dots, x^m) = \varphi_1(x^1) \cdots \varphi_m(x^m). \end{aligned}$$

Alors, il existe une unique forme linéaire  $S_L \in \mathcal{L}(X_1 \otimes \cdots \otimes X_m)$ , tel que  $S = S_L \circ \sigma_m$ .

Soit  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ ,

$$\begin{aligned} |S_L(u)| &= \left| S_L \left( \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n S_L(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |S_L(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m)| \\ &= \sum_{i=1}^n |S(x^1, \dots, x^m)| \\ &= \sum_{i=1}^n |\varphi_1(x^1)| \cdots |\varphi_m(x^m)| \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\|. \end{aligned}$$

On prend l'infimum sur toutes les représentations de  $u$ , on conclure que  $|S_L(u)| \leq \pi(u)$ , pour tout  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

En particulier, pour  $x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

$$\begin{aligned}
 \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\| &= \|x_i^1\| \cdots \|x_i^m\| \\
 &= |\varphi_1(x^1) \cdots \varphi_m(x^m)| \\
 &= |S(x^1, \dots, x^m)| \\
 &= |S_L(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m)| \\
 &\leq \pi(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m)
 \end{aligned}$$

Donc,  $\pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = \|x^1\| \cdots \|x^m\|$ . ■

La norme  $\pi$  s'appelle la norme projective, et l'espace  $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_m$  est l'espace de produit tensoriel des espaces  $X_1, \dots, X_m$  muni de la norme  $\pi$ , cet espace en général n'est pas complet, alors on note par  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  son complété. L'espace de Banach  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  s'appelle le produit tensoriel projectif des espaces  $X_1, \dots, X_m$ . Pour plus de détails voir [1] et [10].

**Proposition 2.2.2** [3] *Si tous les espaces vectoriels  $X_1, \dots, X_m$  sont des dimensions finies, alors  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  est un espace à dimensions finies. De plus, si  $X_1, \dots, X_m$  sont normés, alors  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  est complet.*

## La linéarisation des applications $m$ -linéaires continues

Maintenant pouvons-nous, en quelque sorte, linéariser les applications multilinéaires. Autrement dit existe-t-il un espace vectoriel  $E$  tel que  $L(E; Y)$  coïncide avec l'espace  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  (existe-t-il un isomorphisme entre les deux espaces) le théorème suivant nous donne la réponse.

**Théorème 2.2.1** [10] *Soient  $X_1, \dots, X_m, Y$  des espaces de Banach. Si  $T : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$  une application multilinéaire continue, alors, il existe une unique application linéaire continue  $T_L$  définie sur  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  dans  $Y$ , vérifier*

$$T_L(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T(x^1, \dots, x^m)$$

pour tout  $x^j \in X_j$ , et tout  $j = 1, \dots, m$ , avec, le diagramme suivant est comutative

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\
 \searrow \sigma_m & \uparrow T_L & \\
 & X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m &
 \end{array}$$



avec  $\sigma_m$  est l'application canonique définie  $X_1 \times \dots \times X_m$  dans  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  par:

$$\sigma_m(x^1, \dots, x^m) = x^1 \otimes \dots \otimes x^m.$$

Autrement dit:  $T = T_L \circ \sigma_m$ .

La correspondance  $T \longleftrightarrow T_L$  est un isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  et  $\mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ . De plus l'application  $T_L$  s'appelle linéarisation de  $T$ .

Le théorème précédent donne l'identification

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y).$$

Si  $Y = \mathbb{K}$ , le dual de  $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)$  est identifié à l'espace des formes multilinéaires bornées.

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m).$$

Avec cette identification, l'action d'une forme continue  $T$ , comme fonction linéaire continue sur  $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi X_m$  est donné par

$$\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \longmapsto \sum_{i=1}^n T(x_i^1, \dots, x_i^m)$$

cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective,

$$\pi(u) = \sup \{ |\langle u, T \rangle|, T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m), \|T\| \leq 1 \}.$$

## 2.3 La norme injective

Par proposition 2.1.3 les éléments de  $X_1 \otimes \dots \otimes X_m$  peuvent être vus comme des formes multilinéaire sur le produit  $X_1^* \times \dots \times X_m^*$  des espaces c'est-à-dire de dual. Avec chaque  $u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m \in X_1 \otimes \dots \otimes X_m$ . Avec peut associer une forme multilinéaire continue  $T_u$  sur  $X_1^* \times \dots \times X_m^*$  donné par

$$T_u(\phi_1, \dots, \phi_m) = \sum_{i=1}^n \phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m), \phi_j \in X_j^* (j = 1, \dots, m).$$

Il est clair que  $T_u$  est continu et nous avons donc une incorporation canonique de  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  dans  $\mathcal{L}(X_1^*, \dots, X_m^*)$  et nous avons

$$\|T_u\| = \sup_{\phi_j \in \mathcal{B}_{X_j^*}, j=1, \dots, m} \left| \sum_{i=1}^n \phi_1(x_i^1) \dots \phi_m(x_i^m) \right|.$$

Cette dernière formule définie à la norme induite par cette intégration, est la forme héréditaire de la norme  $\mathcal{L}(X_1^*, \dots, X_m^*)$ .

**Définition 2.3.1** Soit  $X_1, \dots, X_m$  des espaces normés. La norme injective sur  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  est définie par

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \phi_j(x_i^j) \right| ; \phi_j \in B_{X_j^*}, j = 1, \dots, m \right\},$$

où  $\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$  est une représentation de  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ .

On note par  $X_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon X_m$  le produit tensoriel muni de la norme  $\varepsilon$ . Cet espace n'est pas complet en général, alors on note par  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$  son complété. L'espace de Banach  $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \cdots \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$  s'appelle le produit tensoriel injectif des espaces de Banach  $X_1, \dots, X_m$ .

**Proposition 2.3.1** [3] Soit  $X_1, \dots, X_m$  des espaces vectoriels normés

- (1)  $\varepsilon(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = \|x^1\| \dots \|x^m\|$ , pour tout  $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ .
- (2) pour tout  $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ , on a  $\varepsilon(u) \leq \pi(u)$ .

## 2.4 La linéarisation des polynômes $m$ -homogènes

**Définition 2.4.1** Soit  $m \in \mathbb{N}$ , et  $X$  un espace vectoriel. Le sous espace de produit tensoriel  $\otimes^m X$  est l'ensemble de tous les éléments  $u \in \otimes^m X$ , de la forme

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i, \quad (n \in \mathbb{N}, x_i \in X, 1 \leq i \leq n).$$

et sera appelée produit tensoriel symétrique de  $X$ , cette sous espace sera noté par  $\otimes_s^m X$ .

Maintenant, on peut définir une norme sur  $\otimes_s^m X$ , qui sera la clé de la linéarisation du polynôme  $m$ -homogène continu définie sur  $X$ . Cette norme s'appelle norme  $s$ -tensor projective, notée par  $\pi_s$ , et définie par

$$\pi_s(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|^m : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i, n \in \mathbb{N} \right\}$$

pour  $u \in \otimes_s^m X$ . On note l'espace normé  $(\otimes_s^m X, \pi_s)$  par  $\otimes_{\pi,s}^m X$ , et par  $\hat{\otimes}_{\pi,s}^m X$  son complétude.

**Proposition 2.4.1** [1] *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . L'application*

$$\begin{aligned} \sigma_m : \quad {}^m X &\rightarrow \hat{\otimes}_{\pi,s}^m X \\ x &\longmapsto \otimes^m x. \end{aligned}$$

Est un polynôme  $m$ -homogène continu avec une norme égale à 1.

**Preuve.** Premièrement, on peut voir que l'application suivante:

$$\begin{aligned} T : \quad X \times \binom{m}{\dots} \times X &\rightarrow \otimes^m X \\ (x^1, \dots, x^m) &\rightarrow x^1 \otimes \cdots \otimes x^m \end{aligned}$$

est une application  $m$ -linéaire. En effet:

soit  $\lambda \in \mathbb{K}, i \in \{1, \dots, m\}$  et  $x^1, \dots, x^i, y^i, \dots, x^m \in X$ , alors

$$\begin{aligned} T(x^1, \dots, \lambda x^i + y^i, \dots, x^m) &= x^1 \otimes \cdots \otimes \lambda x^i + y^i \otimes \cdots \otimes x^m \\ &= \lambda(x^1 \otimes \cdots \otimes x^i \otimes \cdots \otimes x^m) + (x^1 \otimes \cdots \otimes y^i \otimes \cdots \otimes x^m) \\ &= \lambda T(x^1, \dots, x^i, \dots, x^m) + T(x^1, \dots, y^i, \dots, x^m) \end{aligned}$$

donc,  $T$  est  $m$ -linéaire.

Selon la proposition 1.1.3, la symétrie  $T_s$  de  $T$ , donnée par:

$$\begin{aligned} T_s : \quad X \times \binom{m}{\dots} \times X &\rightarrow {}^m \otimes X \\ (x^1, \dots, x^m) &\rightarrow \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)} \end{aligned}$$

est une application  $m$ -linéaire symétrique. Comme l'image de l'application  $T_s$  est tout simplement le produit tensoriel symétrique  $\otimes_s^m X$ , la application

$$\begin{aligned} T' : X^m &\rightarrow \hat{\otimes}_{\pi,s}^m X \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto T_s(x^1, \dots, x^m), \end{aligned}$$

est bien définie, et  $m$ -linéaire. De plus,  $T'(x, \overset{(m)}{\dots}, x) = \sigma_m(x)$ , pour tout  $x \in X$ , donc l'application  $\sigma_m$  est une polynome  $m$ -homogène. Comme nous l'avons vu plus haut il est vrai que

$$\pi_s(\sigma_m(x)) = \pi_s(\otimes^m x) = \|x\|^m$$

pour tout  $x \in X$ . Selon la proposition 2.1.4, cela prouve que le polynome  $m$ -homogène  $\sigma_m$  est continu et de norme 1. ■

**Théorème 2.4.1** [10] *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces normés. Si  $P : X \rightarrow Y$  est un polynome  $m$ -homogène continu, alors il existe une application linéaire unique  $P_L \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y)$  telle que :*

$$P(x) = P_L(x \otimes \overset{m}{\dots} \otimes x), \text{ pour tout } x \in X.$$

La correspondance  $P \leftrightarrow P_L$ , établit un isomorphisme isométrique entre l'espace  $\mathcal{P}(^m X; Y)$ . Considérons le polynôme canonique :

$$\delta_m : ^m X \rightarrow \hat{\otimes}_{\pi,s}^m X,$$

définir par :

$$\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\dots} \otimes x.$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} ^m X & \xrightarrow{P} & Y \\ \searrow \delta_m & \uparrow P_L & \\ & \hat{\otimes}_{\pi,s}^m X & \end{array}$$

ainsi  $P = P_L \circ \delta_m$ .

l'application linéaire continue  $P_L$  s'appelle la linéarisation du polynôme  $m$ -homogène continu  $P$ .

**Preuve.** Soit  $P : X \rightarrow Y$  polynôme  $m$ -homogène. On choisit  $T$  tel que  $P(x) = T(x, \dots, x)$ , pour tout  $x \in X$ .

Alors  $P(x) = T_L(x \otimes \dots \otimes x)$ , pour tout  $x \in X$ , tel que  $T_L : {}^m \otimes X \rightarrow Y$  la linéarisation de  $T$  par théorème 2.2.1. Soit  $P_L$  la restriction de  $T_L$  sur  ${}^m \otimes X$ , donc l'opérateur  $P_L$  est linéaire et  $P = P_L \circ \delta_m$ .

Soit  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \dots \otimes x_i \in \otimes_s^m X$ , on a

$$\begin{aligned} \| P_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \dots \otimes x_i) \| &\leq \sum_{i=1}^n \| P_L(x_i \otimes \dots \otimes x_i) \| \\ &= \sum_{i=1}^n \| P(x_i) \| \\ &\leq \| P \| \sum_{i=1}^n \| x_i \|^m. \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de  $u$ , alors

$$\| P_L(u) \| \leq \| P \| \pi_s(u).$$

Donc  $P_L$  est borné et  $\| P_L \| \leq \| P \|$ .

D'autre part, pour tout  $x \in X$

$$\begin{aligned} \| P(x) \| &= \left\| P_L(x \otimes \dots \otimes x) \right\| \\ &\leq \| P_L \| \pi(x \otimes \dots \otimes x) \\ &= \| P_L \| \| x \|^m \end{aligned}$$

Donc  $\| P_L \| = \| P \|$ .

Soit maintenant  $S_L \in \mathcal{L}(\otimes_{\pi,s}^m X, Y)$  une autre application de linéarisation de  $P$ , alors:

$$\begin{aligned} S_L(u) &= S_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \dots \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n S_L(x_i \otimes \dots \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P_L(x_i \otimes \dots \otimes x_i) \\ &= P_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \dots \otimes x_i) = P_L(u). \end{aligned}$$

Donc  $P_L, S_L$  sont identiques sur  $\otimes_s^m X$  et enfin, par densité, ils sont identiques sur  $\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X$ .

Maintenant, on montre que l'application  $\varphi$  est isomorphisme isométrisé tel que

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}({}^m X; Y) &\rightarrow \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y) \\ P &\mapsto P_L\end{aligned}$$

1- On prouve que  $\varphi$  est linéaire.

On a

$$\begin{aligned}(P + \lambda P')_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i) &= \sum_{i=1}^n (P + \lambda P')(x_i) = \sum_{i=1}^n [P(x_i) + \lambda P'(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^n P'(x_i) \\ &= P_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i) + \lambda P'_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i) \\ &= (P_L + \lambda P'_L)(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i),\end{aligned}$$

pour tout  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i \in \otimes_s^m X$  et  $P, P' \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Donc  $(P + \lambda P')_L = P_L + \lambda P'_L$ . alors  $\varphi(P + \lambda P') = (P + \lambda P')_L = P_L + \lambda P'_L = \varphi(P) + \lambda \varphi(P')$ .

Donc  $\varphi$  est linéaire.

2- On montre que  $\varphi$  est injective.

On suppose que  $P \in \ker \varphi$ , c'est à dire  $\varphi(P) = 0$ , dans ce cas  $P_L = \varphi(P) = 0$ .

Donc

$$P_L(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i) = 0,$$

pour tout  $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \cdots \otimes x_i \in \otimes_s^m X$ . En particulier

$$0 = P_L(x \otimes \cdots \otimes x) = P(x),$$

pour tout  $x \in X$ . Alors  $P = 0$ .

Donc  $\varphi$  est injective.

Montrons que  $\varphi$  est surjective.

Pour  $u \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ . On définit

$$\begin{aligned} B : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto B(x) = u(x \otimes \cdots \otimes x) \end{aligned}$$

il est facile de voir que  $B \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ , donc il existe une unique application linéaire  $B_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y)$  tel que  $B = B_L \circ \delta_n$ . D'un autre part,  $B = u \circ \sigma_n$ .

Comme  $B_L$  est l'unique application linéaire tel que  $B = B_L \circ \delta_n$ , alors  $u = B_L$ .

Donc  $\varphi(B) = B_L = u$ .

Donc  $\varphi$  est surjective.

3- On a

$$\| \varphi(P) \| = \| P_L \| = \| P \| .$$

De (1),(2) et (3) La correspondance  $P \leftrightarrow P_L$  est une isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach  $\mathcal{P}(^m X; Y)$  et  $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y)$ . ■

# Chapitre 3

## Les polynômes $m$ -homogènes intégrales

Dans ce chapitre, on applique la théorème de linéarisation pour étudier les polynômes  $m$ -homogènes sont intégrales.

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $X_j, Y$  sont des espaces de Banach et  $j = 1, \dots, m$ .

### 3.1 Les polynômes $m$ -homogènes intégrales

Avant de donner la définition des polynômes  $m$ -homogènes intégrales, nous commençons par rappeler la définition des applications multilinéaires intégrales.

**Définition 3.1.1** [2] *Une application  $m$ -linéaire continue  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$  est intégrale s'il existe une constante  $C \geq 0$ , tel que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et toutes les suites  $(x_{1i})_{i=1}^n \subset X_1, \dots, (x_{mi})_{i=1}^n \subset X_m$  et  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ , on a*

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_{1i}, \dots, x_{mi}), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{\substack{x_k^* \in \mathcal{B}_{X_k^*} \\ k=1, \dots, m}} \left\| \sum_{i=1}^n x_1^*(x_{1i}) \cdots x_m^*(x_{mi}) y_i^* \right\|_{Y^*}. \quad (3.1)$$

La classe des applications  $m$ -linéaires continues intégrales de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  dans  $Y$ , qui est noté par  $\mathcal{L}_I(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$ , est un espace de Banach muni du norme  $\|T\|_{\mathcal{L}_I}$ , c'est-à-dire le plus petite constante  $C$  telle que l'inégalité (3.1) est vérifiée.

Pour  $m = 1$  c'est le cas linéaire des applications linéaires continues intégrales  $\mathcal{L}_I(X, Y)$ ,



on a:

$$\mathcal{L}_I(X_1 \times \cdots \times X_m; Y) \subset \mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$$

avec

$$\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}_I}, \text{ pour tous } T \in \mathcal{L}_I(X_1 \times \cdots \times X_m; Y).$$

Pour  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$ , on note par  $T_L$  l'application linéaire de  $T$ , définie par

$$T_L : X_1 \otimes \cdots \otimes X_m \rightarrow Y$$

où

$$T_L \left( \sum_{i=1}^n x_{1i} \otimes \cdots \otimes x_{mi} \right) = \sum_{i=1}^n T(x_{1i}, \dots, x_{mi}).$$

**Proposition 3.1.1** [2] *Une application  $m$ -linéaire continue  $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m, Y)$  est intégrale si, et seulement si,  $T_L : X_1 \otimes_{\in} \cdots \otimes_{\in} X_m \rightarrow Y$  est bien défini et intégrale.*

Maintenant on donne la version du polynômes.

**Définition 3.1.2** [2] *On dit que les polynômes  $m$ -homogènes continus  $P : X \rightarrow Y$  est intégrale s'il existe une constante  $C \geq 0$  tel que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et toutes les suites  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$  et  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ , on a*

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle P(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^n [x^*(x_i)]^m y_i^* \right\|_{Y^*}. \quad (3.2)$$

*La classe de ces polynômes  $m$ -homogènes continus intégrales de  $X$  dans  $Y$ , qui est noté par  $\mathcal{P}_I(^m X; Y)$ , est un espace de Banach muni du norme  $\|P\|_{\mathcal{I}}$ , c'est-à-dire le plus petite constante  $C$  telle que l'inégalité (3.2) est vérifiée.*

**Proposition 3.1.2** *Soit  $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ . Alors  $\mathcal{P}_I(^m X; Y) \subset \mathcal{P}(^m X; Y)$  avec*

$$\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{I}}, \text{ pour tous } P \in \mathcal{P}_I(^m X; Y).$$

**Preuve.** Soit  $P \in \mathcal{P}_I({}^m X; Y)$ , on a par définition  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$  et  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \|[x^*(x_i)]^m y_i^*\|_{Y^*} \\
 &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \left( \sup_{y \in \mathcal{B}_Y} |[x^*(x_i)]^m y_j^*(y)| \right) \\
 &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} |[x^*(x_i)]^m| \sup_{y \in \mathcal{B}_Y} |y_j^*(y)| \\
 &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \|x^*\|^m \|x_i\|^m \sup_{y \in \mathcal{B}_Y} \|y_j^*\| \|y\| \\
 &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \|x_i\|^m \|y_j^*\|,
 \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
 |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \|P(x_i)\| \|y_j^*\| \leq \|P\|_{\mathcal{I}} \|x_i\|^m \|y_j^*\|, \\
 \Leftrightarrow \|P(x_i)\| &\leq \|P\|_{\mathcal{I}} \|x_i\|^m,
 \end{aligned}$$

donc  $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$  et  $\mathcal{P}_I({}^m X; Y) \subset \mathcal{P}({}^m X; Y)$ . ■

## 3.2 La linéarisation des polynômes $m$ -homogènes intégrales

**Proposition 3.2.1** [2] *Le polynôme  $m$ -homogène continu  $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$  est intégrale si, et seulement si,  $P_L : \otimes_{\epsilon, s}^m X \rightarrow Y$  est bien défini et intégrale.*

**Preuve.** On supposons que  $P$  est intégrale. Facilement,  $P_L$  est continue sur le produit tenseur non complété avec la norme  $\epsilon$  et donc il est bien défini sur  $\otimes_s^m X$ . D'autre côté,  $P_L$  est intégrale si et seulement si l'application linéaire

$$\widetilde{P}_L : (\otimes_{\epsilon, s}^m X) \otimes Y^* \rightarrow \mathbb{K},$$

défini par

$$\widetilde{P}_L \left( \sum_{i=1}^n u_i \otimes y_i^* \right) = \sum_{i=1}^n \langle P_L(u_i), y_i^* \rangle$$

pour tout  $u_i \in \otimes_{\epsilon, s}^m X$  et  $y_i^* \in Y^*$  ( $1 \leq i \leq n$ ), est continu par rapport à la norme injective sur  $(\otimes_{\epsilon, s}^m X) \otimes Y^*$ . Nous avons remarqué que, si

$$u_i = \sum_{j=1}^{r_i} x_j^{(i)} \otimes \cdots^{(m)} \otimes x_j^{(i)}, \text{ avec } x_j^{(i)} \in X \\ (1 \leq j \leq r_i, 1 \leq i \leq n),$$

alors

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{P}_L \left( \sum_{i=1}^n u_i \otimes y_i^* \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left\langle P_L \left( \sum_{j=1}^{r_i} x_j^{(i)} \otimes \cdots^{(m)} \otimes x_j^{(i)} \right), y_i^* \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^{r_i} P_L \left( x_j^{(i)} \otimes \cdots^{(m)} \otimes x_j^{(i)} \right), y_i^* \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^{r_i} P \left( x_j^{(i)} \right), y_i^* \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} \left\langle P \left( x_j^{(i)} \right), y_i^* \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la définition 3.1.2 pour les suites  $(x_j^{(i)})_{\substack{j=1, \dots, r_i \\ i=1, \dots, n}}, (y_{ij}^*)_{\substack{j=1, \dots, r_i \\ i=1, \dots, n}}$ , où  $y_{ij}^* = y_i^*$  ( $j = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, n$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{P}_L \left( \sum_{i=1}^n u_i \otimes y_i^* \right) \right| &\leq C \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} \left[ x^* \left( x_j^{(i)} \right) \right]^m y_{ij}^* \right\|_{Y^*} \\ &= C \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^n \left( x^* \otimes \cdots^{(m)} \otimes x^* \right) \left( \sum_{j=1}^{r_i} x_j^{(i)} \otimes \cdots^{(m)} \otimes x_j^{(i)} \right) y_i^* \right\|_{Y^*} \\ &\leq C \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \Phi(u_i) g(y_i^*) \right| : \Phi \in (\otimes_{\epsilon}^m X)^*, \|\Phi\| \leq 1, g \in \mathcal{B}_{Y^{**}} \right\} \\ &= C \left\| \sum_{i=1}^n u_i \otimes y_i^* \right\|_{\epsilon}. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que  $\widetilde{P}_L$  est continu par rapport à la norme injective sur  $(\otimes_{\epsilon,s}^m X) \otimes Y^*$ . Soient  $n \in \mathbb{N}$  et toutes les suites  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$  et  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$  être fixé. On a

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^n \langle P(x_i), y_i^* \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \widetilde{P}_L \left[ \left( x_i \otimes \cdots \otimes x_i \right) \otimes y_i^* \right] \right| \\
 &= \left| \widetilde{P}_L \left[ \sum_{i=1}^n \left( x_i \otimes \cdots \otimes x_i \right) \otimes y_i^* \right] \right| \\
 &\leq C \sup_{\substack{x^* \in \mathcal{B}_{X^*} \\ g \in \mathcal{B}_{Y^{**}}}} \left| \sum_{i=1}^n [x_i^*(x_i)]^m g(y_i^*) \right| \\
 &= C \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \left\| \sum_{i=1}^n [x_i^*(x_i)]^m y_i^* \right\|_{Y^*},
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété associative du produit tensoriel injectif. Donc,  $P$  est intégrale. ■

**Corollaire 3.2.1** [8] *Comme conséquence de proposition 3.1.1 et 3.21.*

*Le polynôme  $m$ -homogène continue  $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$  est intégrale si, et seulement si,  $\widehat{P} \in \mathcal{L}(^m X, Y)$  est intégrale.*

# Conclusion

Au cours des dernier années la théorie des opérateurs linéaires c'est étude a des contextes non linéaires contient les applications multilinéaires et les polynômes  $m$ -homogènes et les applications Lipchitz...etc.

Le transfert de propriétés de sommabilité vers les applications non linéaires n'est pas une procédure évidente comme les théorèmes de dominations de Pietsch/factorisation et les théorèmes de compacité...(absence de ces théorèmes dans plusieurs classes des applications non linéaires).

L'un des méthodes qui nous permettant d'obtenue un lien fondamental avec la théorie linéaire c'est la méthode de linéarisation.

Ici nous avons étudié un exemple des applications non linéaires qui sont les applications multilinéaires des polynômes  $m$ -homogènes  $G$ -intégrales c'est-à-dire intégrale au sens de Grothendieck.

# Bibliographie

- [1] R. T. Alves. Polinômios dominados entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia 2011.
- [2] R. Cilia. M. D’Anna and Joaquín M. Gutiérrez, Polynomial characterization of  $\mathcal{L}_\infty$ -spaces, Universidad Politécnica de Madrid 2001.
- [3] E. Dahia. Sur la représentation tensorielle des idéaux multilinéaires, thèse de doctorat, Universite Mohamed Boudiaf-M’sila 2014.
- [4] F. R. De Moura. Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia 2014.
- [5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [6] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 , 1–79 (1956).
- [7] M. Y. Miyamura. , Reflexividade de Espacos de Operadores Lineares e Espaços de Polinômios Homogêneos. Campinas, [S.P. :s.n.] 2007.
- [8] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, North Holland mathematics studies 120, Amesterdam 1986.
- [9] A. Ryan, Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy, Ph.D. Thesis, Trinity College, Dublin, (1980).

- [10] R. Ryan, Introduction to Tensor Product of Banach Spaces, Springer-Verlag, London, 2002. La linéarisation du polynômes  $m$ -homogènes.
- [11] R. Schatten, The cross-space of linear transformations, Ann. of Math. (2)47 (1946), 73–84 .
- [12] A. R. Silva. Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

### Abstract

This work deals with continuous  $m$ -homogeneous polynomials, we have included basic definitions and results, then, we studied the basic concepts of tensor product, to put the theorem of linearization of continuous  $m$ -homogeneous polynomials, and at the end of this work, we presented integral  $m$ -homogeneous polynomials and linearization of integral  $m$ -homogeneous polynomials with the proof and some results.

**Key words:** multilinear application,  $m$ -homogeneous polynomial, tensor product, integral  $m$ -homogeneous polynomial, linearization of integral  $m$ -homogeneous polynomial.

### Résumé

Ce travail traite les polynômes  $m$ -homogènes continus, nous avons inclus des définitions et des résultats de base, ensuite, nous avons étudié les concepts de base du produit tensoriel, pour mettre le théorème de la linéarisation des polynômes  $m$ -homogènes continus, et à la fin de ce travail, nous avons présenté les polynômes  $m$ -homogènes intégrales et la linéarisation de polynôme  $m$ -homogène intégrale avec la preuve et quelques résultats.

**Mots clés :** application multilinéaire, polynôme  $m$ -homogène, produit tensoriel, polynôme  $m$ -homogène intégrale, linéarisation des polynômes  $m$ -homogènes intégrales.

### ملخص

يتناول هذا العمل كثيرات الحدود متعددة التجانس المستمرة، حيث في البداية أدرجنا المفاهيم و النتائج الأساسية، ثم تطرقنا لمفهوم جداء الموتر الذي من خلاله تطرقنا لنظرية خطية كثيرات الحدود متعددة التجانس، و أنهينا العمل بتقديم كثيرات الحدود متعددة التجانس القابلة للمكاملة و خطية كثيرات الحدود متعددة التجانس القابلة للمكاملة مع البرهان و بعض النتائج الأساسية.

**الكلمات المفتاحية:** تطبيق متعدد الخطية، كثيرات الحدود متعددة التجانس، جداء الموتر، كثيرات الحدود متعددة التجانس القابلة للمكاملة، خطية كثيرات الحدود متعددة التجانس القابلة للمكاملة.